DIMOSTRAZIONE DEL FATTO CHE c_0 NON È COMPLEMENTATO IN ℓ_∞

L. VESELY

In questo testo, presenteremo una dimostrazione del seguente importante fatto.

Teorema 0.1. *c_0 non è complementato in ℓ_∞.*

Dimostrazione

(a) **Osservazione.** *Esiste una famiglia non numerabile $\{A_s : s \in S\}$ di sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ tale che l'intersezione di ogni coppia dei suoi membri sia finita.* Infatti, possiamo identificare $\mathbb{N}$ con l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali e, per ogni s numero irrazionale definire A_s come i termini di una successione in $\mathbb{Q}$ convergente a s. (Idea elegante di Sierpiński!)

(b) Procedendo per assurdo, supponiamo che

$$\ell_\infty = c_0 \oplus M.$$

Chiaramente M è isomorfo allo spazio quoziente ℓ_∞/c_0. Siccome ℓ_∞, e quindi anche M, ammette una successione di elementi del duale che sia totale (pensiamo ai funzionali delle coordinate!), anche ℓ_∞/c_0 ammette una successione totale di funzionali continui lineari.

(c) Sia $\{A_s : s \in S\}$ una famiglia come in (a). Per ogni $s \in S$, denotiamo

$$\begin{aligned} x_s &:= \chi_{A_s} \in \ell_\infty\,, \\ \hat{x}_s &:= x_s + c_0 \in \ell_\infty/c_0\,. \end{aligned}$$

Siano $s_1, s_2 \in S$ distinti. Chiaramente, $x_{s_1} + x_{s_2}$ può assumere solo i valori $0, 1, 2$, e il valore 2 viene assunto al più in un numero finito di coordinate. Quindi

$$v := -\chi_{A_{s_1} \cap A_{s_2}} \in c_0\,,$$

per cui $\|\hat{x}_{s_1} + \hat{x}_{s_2}\|_{\ell_\infty/c_0} \le \|x_{s_1} + x_{s_2} + v\|_\infty \le 1$.

(d) Dati $f \in (\ell_\infty/c_0)^*$ e $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$B(f, n) = \{s \in S : |f(\hat{x}_s)| \ge \tfrac{1}{n}\}.$$

Ora, siano $s_1, \dots, s_m \in B(f,n)$ a due a due distinti, $\theta_i := \operatorname{sgn} f(\hat{x}_{s_i})$ $(1 \le i \le m)$,

$$\xi := \sum_{i=1}^{m} \theta_i \, \hat{x}_{s_i} \, .$$

Un ragionamento simile a quello in (c) implica che $\|\xi\|_{\ell_\infty/c_0} \le 1$, e quindi $|f(\xi)| \le \|f\|$. Ne segue che

$$\|f\| \ge |f(\xi)| = \sum_{i=1}^{n} |f(\hat{x}_{s_i})| \ge \frac{m}{n} \, .$$

Ciò dimostra che $B(f,n)$ è finito (non può avere più di $n\|f\|$ elementi!).

(e) **Corollario.** *Per ogni $f \in (\ell_\infty/c_0)^*$, l'insieme*

$$B(f) := \{s \in S : f(\hat{x}_s) \neq 0\} = \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(f,n)$$

è al più numerabile.

Di conseguenza, ℓ_∞/c_0 non può avere (nel suo duale) insiemi numerabili totali (in quanto S non è numerabile!). Ma ciò contraddice (b).

La dimostrazione è completa.

References

FPST08 [1] L. Narici and E. Beckenstein, *Topological Vector Spaces. Second edition*, Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), Vol. 296, CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.